Математик и прикладник: о взаимо(не)понимании

Н. Н. Непейвода*

Аннотация

Рассматривается проблема взаимопонимания чистого математика и прикладника. Приводятся основные тезисы, которых стоит придерживаться сторонам диалога, чтобы увеличить степень взаимопонимания. Они обосновываются на примерах из математики и практики.

> Мы говорим на разных языках,
> Хотя слова у нас одни и те же.
> Слова одни, но смысл иной в строках.
> Друг друга понимаем мы все реже.
>
> А дни идут, и с каждым новым днем
> Становимся все более чужими,
> И даже понимания не ждем.
> Слова же не становятся другими.
>
> Дарья Апольцева

1 О проблеме

Анекдотическим недоразумениям, возникающим при диалоге чистого математика и прикладника, посвящено немало реальных историй, анекдотов и баек. Один из самых показательных случаев следующий.

> Пафнутий Львович Чебышев во время пребывания в Париже решил выступить с популярной лекцией «Математические основы оптимального раскроя одежды.» Привлеченные именем русской знаменитости, на лекцию собрались, в частности, ведущие мастера haute couture Парижа. Но все они покинули зал после первой же фразы докладчика:

*Удмуртский государственный университет. e-mail: nnnuni.udm.ru

— Примем для простоты, что человеческое тело имеет форму шара.

Как известно, П. Л. Чебышев, являясь в первую очередь математиком-теоретиком, одновременно был и автором многих работ, имеющих прикладное значение. Так что такая фраза математика с достаточно широким кругозором с очевидностью показывает, что проблема взаимопонимания чистых математиков и прикладников возникла уже давно, и с годами, как показывает мировой опыт, она не становится легче.

Более того, в последнее время данная проблема обострилась по следующей причине. Специалисты в области численной математики имеют традицию и опыт общения с прикладниками. Но сейчас стала весьма актуальной задача приложений результатов и, главное, идей и методов, нечисленной математики: абстрактной алгебры, топологии, математических разделов логики. Специалисты в данных областях всегда относились к наиболее чистым математикам-теоретикам, да и опыт, накопленный поколениями специалистов в области дифференциальных уравнений и теории вероятностей, им (по крайней мере) внешне кажется неподходящим, поскольку любое изложение данного опыта существенно использует числа.

Мы рискнули написать данную статью на столь болезненную тему, поскольку в течение научной карьеры имели отношение и к чистейшей абстрактнейшей теории, и к ползучей практике, и к высоким прикладным материям типа системного и логического анализа, и к педагогике математики и информатики. Надеемся, что эта работа не окажется однобокой, и хорошо было бы, если и математики, и прикладники будут, хотя и ругая автора, использовать высказанные в работе положения.

2 Как прикладнику понимать математика?

В данном случае имеется полнейший вакуум. Прикладники зачастую высокомерно считают, что, поскольку деньги находятся в основном у них, математики обязаны их понимать. Математики же из высших соображений считают, что они не обязаны понимать какие-то туманные и путаные пояснения, и выделяют из них «поддающиеся точному пониманию» ключевые слова.

Теперь проанализируем позицию и трудности прикладника. Рассмотрим элементарное требование, что партнера по работе нужно понимать (а математик может быть лишь партнером, но не слугой; попытка использовать математика как «наемного священника», произносящего заказанные молитвы, никогда ни к чему хорошему не приводила). В случае математика это требование понимается и истолковывается прикладниками чаще всего грубо неадекватно.

С точки зрения обычного человека математик — исключительно некоммуникабельная личность, говорящая на совершенно непонятном языке и при этом часто говорящая абсурдные вещи. Даже есть (на самом деле обоснованный) полупсихиатрический термин: *математический идиотизм.* Его признаком служит стремление подогнать исключительно сложные структуры жизни под исключительно (с *высшей* точки зрения) простые конструкции математики. Когда математик впадает в данный грех, он порою произносит по адресу тех, кто хватается за голову, слова: «Настоящий математик понял бы». Приведем несколько простейших примеров математического идиотизма.

Уже в древнеегипетских математических папирусах встречается задача:

> *Разделить* 10 *кувшинов пива между* $3\frac{1}{3}$ *жрецами.*

В сборнике олимпиадных задач для школьников автор встретил задачу, начинающуюся следующим образом.

> *В клубе толстяков имеется* 100 *человек с весом, соответственно,* $1, 2, \ldots\ 100$ *килограммов.*

Из задачника в задачник кочует следующая задача по «теории вероятностей»:

> *Средняя продолжительность жизни человека* 70 *лет. Какова вероятность того, что он доживет до* 20 *лет?*

Как видите, зачастую математики *полностью отключают здравый смысл.* Это их профессиональная особенность: здравый смысл чаще всего мешает при работе на абстрактных уровнях математики. Апелляция к нему исключительно опасна и не раз приводила к крайне болезненным ошибкам. Даже если результат прямо противоречит «здравому смыслу», но точно доказан, математик готов принять его и, более того, на его основе делать дальнейшие математические выводы. Но беда в том, что профессиональная привычка иногда распространяется и на другие сферы жизни. Такая особенность математика как субъекта коммуникации приводит к тому, что диалог просто не может начаться, если пытаться начать его *прямо.*

Надо обратить внимание на еще одну особенность диалога прикладника с математиком. Многие прикладники изучали «высшую математику» и искренне считают, что они разбираются в ней. Даже если это действительно так, слишком часто они при этом попадают со сферы знания (где они живут, когда дело касается их собственной прикладной области) в пространство полузнания и невежества. Прикладники в беседе пытаются выражаться на математическом языке. При этом они либо (с точки зрения математика) делают грубые ошибки, после чего диалог прерывается и обе стороны расходятся, недовольные друг другом[1]; либо, что еще хуже в конечном итоге, выдают достаточно гладкую формулировку, не обосновывая ее. Но при решении математической задачи обоснования *формулировки* и не нужно: математик привык *решать задачу*, и он ее решает. Так что в данном случае прикладник попадает в собственную ловушку, а математик начинает решать задачу, которая, возможно, не соответствует реальной.

Далее, прикладник, желающий получить у математика как у партнера необходимые ему сведения, может попасть и в третью ловушку, когда диалог первоначально заканчивается к общему удовлетворению, в дальнейшем ведущему к глубокому взаимному разочарованию. Прикладник может считать, что математик выдаст ему готовое решение, которое останется лишь применить. Но без постоянной обратной связи математик обязательно будет решать ту задачу, которая ему интересна[2], и только случайно она может оказаться той, которая нужна. Прикладнику нужно быть также готовым к тому, что решение, которое кажется на первый взгляд противоречащим здравому смыслу, на самом деле является устранением давно привычной и принятой в обществе ошибки, и именно эта привычная ошибка мешала найти решение многих практических задач. Например, когда Вольтерра показал, что для сохранения популяции оленей нужно охранять популяцию волков, это первоначально казалось абсурдным.

Так что математика нужно понимать и направлять. Его нельзя ни презирать, ни идолизировать, с ним нужно вести диалог, а не внимать ему либо давать ему указания. Эту общую позицию мы можем конкретизировать в следующие правила.

Совет 1. *Если математик говорит Вам про выбор между точными математическими понятиями «Это не имеет никакого значения» либо «Это несущественно», понимайте его следующим образом: «Это не имеет никакого значения внутри математики, но имеет первостепенную важность на практике».*

Обоснование. Для теоретического математика (а именно, для доказательства теорем) абсолютно безразлично, использовать ли определение решетки как частично упорядоченного множества, в котором каждое конечное подмножество элементов имеет верхнюю и нижнюю грани, или как алгебраической системы с бинарными операциями $\cup$ и $\cap$, константами 0 и 1, удовлетворяющим аксиомам решетки.

Для него безразлично, представить ли конечный автомат как таблицу переходов или как функцию из прямого произведения $S \times S$ в S. Более того,

[1]Но, впрочем смотрите совет 4

[2]Впрочем, точно так же склонен поступать и программист.

входные и выходные символы автомата он обозначит так же, как состояния, поскольку это теоретически проще.

Для него не имеет никакого значения, как определить топологию: через как минимум континуальное множество окрестностей либо через их счетный базис. Более того, первое для него проще.

Все рассмотренные примеры показывают важнейший принцип, который забывается в практике преподавания математики и поэтому практически неизвестен широкому кругу прикладников:

> *Изоморфизмы между различными структурами — одно из наиболее ценных знаний, которое можно получить из математики. Ведь если две структуры изоморфны, на практике это означает, что у нас есть как минимум два внешне совершенно различных представления данных для решения одних и тех же задач. А выбор хорошего представления данных — больше чем полпути к хорошему решению практической задачи.*

Именно поэтому хорошее знание алгебры (в первую очередь абстрактной общей алгебры) является ценнейшим для прикладника: оно увеличивает багаж представлений данных и методов перехода между ними.

Предупреждение. Когда математик говорит «Это несущественно» не по поводу математических понятий, а по поводу содержательных, смотри совет 3.

Совет 2. *Если математик говорит Вам: «Это в принципе возможно», понимайте его: «Это невозможно практически».*

Обоснование. Математика интересует прежде всего красота и сложность решения задачи (задача котируется выше, если она имеет либо красивое, либо сложное решение). Поэтому вопрос *реализуемости* решения для обычного математика находится далеко на заднем плане, а часто вообще за пределами его круга интересов.

Предупреждение. Ни один из советов данной работы не является абсолютным, но совет 2 ближе всего к таковому. Тем более ценны случаи, когда он оказывается неверным. В частности, это может быть потому, что математик знает лишь чисто теоретический способ решения задачи, а рядом лежит и практическая его конкретизация, которую математик не замечал потому, что она казалась ему излишним усложнением. Может быть и другая ситуация, когда сложность реализации теоретического решения связана с тем, что оно обязано быть полным, и основной вклад в нее вносят как раз те случаи, которые не встречаются на практике.

Самый красивый из известных автору контрпримеров к данному совету связан с элементарной теорией действительных чисел.

Как известно, большинство прикладных математических теорий неразрешимо. В частности, по теореме Геделя о неполноте неразрешимы теории, явно использующие натуральные числа. Да и в случае, когда удается доказать разрешимость теории, ситуация обычно ненамного лучше, что даже породило грустную шутку логиков: «Доказательство разрешимости чаще всего означает лишь то, что неразрешимость невозможно доказать».

В частности, разрешима элементарная теория действительных чисел (аксиомы упорядоченного поля действительных чисел и схема аксиом, говорящая для каждого многочлена нечетной степени, что он имеет действительный корень; общее понятие многочлена в такой теории не сформулируешь, поскольку тогда у нас были бы натуральные числа и неразрешимость). Известна суперэкспоненциальная нижняя оценка сложности алгоритма, разрешающего данную теорию. Но в машине математических преобразований Maple вовсю используется процедура проверки утверждений элементарной теории поля действительных чисел, поскольку ужасная нижняя оценка достигается на таких формулах, которые нормальный математик либо прикладник никогда не напишет (а если уж напишет, то сам виноват!)

Совет 3. *Если математик говорит Вам: «Для простоты примем, что...» или «Без ограничения общности можно считать, что...», внимательно выслушайте это предположение и заставьте зафиксировать его явно, и столь же явно выпишите свои сомнения. После чего прекратите временно разговор и подумайте, действительно ли можно здесь упростить ситуацию. Если Вам кажется, что это не так, переставьте задачу таким образом, чтобы математик не мог сказать такие слова по данному поводу.*

Обоснование. Самый поразительный случай, который знает автор, связанный с внешне совершенно безобидным «для простоты», возник в теоретической информатике. «Для простоты» все время предполагали в теоретических исследованиях, что функция имеет один аргумент (в самом деле, если их несколько, то можно все аргументы соединить в кортеж и рассматривать функцию от одного аргумента). Но оказывается, что при этом игнорируется несколько важных эффектов, простейший из которых следующий. Как известно, в теории алгоритмов и в информатике практически всегда необходимо учитывать возможность ошибки. Если единственный аргумент функции является ошибкой, то все ясно. А вот из нескольких аргументов часть может быть ошибками, а часть — вполне определенными значениями, и функция может сработать правильно, несмотря на ошибочные аргументы. Скажем, умножение можно запрограммировать так, что оно даст 0 в случае, если первый (или второй, но обязательно один определенный еще при составлении программы) сомножитель равен 0, а второй является ошибкой:

$$x * y \Leftarrow \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } x * (y - 1) + x \textbf{ fi}$$

Хотя данная принципиальная ошибка выявлена еще в 1980 г., но она заразила столь много работ, что отделить те, которые делали данное предположение, от тех, которые написаны корректно, нельзя. К сожалению, подобные результаты в мировой практике преподавания чаще всего игнорируются, и до сих пор такое предположение встречается в преамбуле многих работ.

Предупреждение. Иногда предположения такого типа на самом деле оказываются весьма разумными. Поэтому, зафиксировав предположение, остыньте и подумайте, можете ли Вы рискнуть несколькими днями, чтобы посмотреть, что же получится в данном случае? Если повезет, то Ваш риск оправдается стократно, а нет — Вы всегда можете потребовать пересмотра решения, сославшись на Ваши оправдавшиеся сомнения.

Совет 4. *Если математик сразу же находит у Вас грубые ошибки, не обижайтесь, а задайте ему вопрос: «Нельзя ли подобрать другую математическую структуру, в которой такие действия были бы оправданы?»*

Обоснование. Рассмотрим пример, случившийся с одним из студентов-информатиков. Решая задачу о перестановке двух подмассивов большого массива без использования дополнительной памяти неопределенного размера, он воспользовался алгебраическим равенством $(b \circ a) = (a^{-1} \circ b^{-1})^{-1}$, что дало возможность применить процедуру переворачивания массива, которая, очевидно, реализуется без дополнительной памяти. Он обосновал свое решение следующим образом: в группе массивов умножением сделаем соединение массивов, а обратным элементом a^{-1} будем считать массив, образующийся из данного записью его в обратном порядке, и применим алгебраические тождества.

Алгебраист немедленно уличил его в абсолютном невежестве, заметив, что данные операции группу не образуют. В самом деле, $a \circ a^{-1} \neq \Lambda$, где Λ — пустой массив. Но необходимые свойства $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ и $(a^{-1})^{-1} = a$ реализуются в полугруппах с инволюцией, и данная математическая структура является корректным обоснованием красивого и краткого решения задачи, предложенного прикладником (а вот этого алгебраист не заметил без подсказки специалиста, являющегося одновременно и прикладником, и теоретиком).

Предупреждение. Такой вопрос следует задать еще и потому, что математик по умолчанию будет просто проверять Ваши рассуждения. В данном примере мы видим, что математик именно это и делал, а задачи поиска подходящей структуры у него просто не было. Как только она появилась, он нашел эту структуру. Если же этот математик не видит таких структур, попробуйте обратиться к другим.

Совет 5. *Если ответ математика очень приятен Вам, перепроверьте его! Если же он обосновывает нечто неприятное Вам либо опровергает Ваши предложения, отнеситесь к этому со всей серьезностью.*

Обоснование. Математика отличается тем, что она бесстрастно делает выводы там, где обычный человек просто не пожелает их сделать. Показательным примером является, в частности, то, что на занятиях по логике студенты первого курса (еще не вошедшие в мир математики полностью), легко сделав вывод, что необходимым условием развода является брак, не приходят к выводу, что необходимым условием смерти является жизнь.

В жизни недооценивают деструктивную мощь математики (разрушение ходячих ошибок) и преувеличивают ее конструктивную силу (нахождение новых решений). В частности, в этом основная методологическая ошибка академика Фоменко, который, сделав абсолютно обоснованный вывод о том, что точность измерения дат в древней истории исключительно низкая, и что работы, обосновывающие «абсолютную точность» традиционной хронологии, содержат явные подтасовки данных (смотри пункт о приятном), не остановился на разумном выводе о том, что надо было бы писать не «в 130 г. от Р.Х.», а нечто вроде «в 130 ± 300 г.» (как писали бы физики либо астрономы), а попытался сконструировать еще более фантастическую систему хронологии.[3]

Предупреждение. В некоторых случаях Ваше решение действительно настолько продумано, что математик может лишь подтвердить его правильность. Но и в этом случае нужно придерживаться следующих принципов:

1. Нельзя ставить перед математиком задачу «Обосновать решение». Часто он действительно его обоснует (ведь можно сделать именно те упрощения, которые подойдут) и от Вас останутся скрыты Ваши собственные ошибки. Нужно ставить задачу «Проверить решение».

2. Получив приятный ответ, сразу же задайте математику вопрос о границах применимости построенной им модели. Ведь такой задачи первоначально не стояло.

3. Содержательно рассмотрите предложенное математиком решение на границах очерченной им области применимости. Если и там оно удовлетворительно, и область применимости существенно шире, чем область нужных Вам значений параметров, тогда смело полагайтесь на математику.

4. Если Ваше решение действительно подтверждается математиком, то наверняка область его применения шире, чем рассмотренная Вами конкретная задача. Подумайте об использовании его и в других случаях. Словом, если Вам посчастливилось, оседлайте удачу.

[3] Множество примеров того, как общепринятые математические модели могут вводить в заблуждение, можно найти в доклад акад. Арнольда [1].

5. Если из полученного обоснования Вы узнали нечто новое про Ваше любимое решение, то это очень ценное обоснование.

Совет 6. *Если Вам кажется, что математик дает глупый либо нерелевантный ответ, помните, что он точно отвечает на точно поставленный Вами вопрос. Значит, таковым был Ваш вопрос. Переформулируйте вопрос.*

Обоснование. Достаточно привести знаменитый анекдот.

> *Летят Холмс и Ватсон на аэростате. Попали в облака и совершенно потерялись. Вдруг в просвете облаков видят они горную вершину. На ней стоит человек. Ватсон кричит: «Где мы?» и получает после некоторого размышления ответ: «Вы на аэростате!»*
>
> *Холмс говорит: «Это был математик. Он основательно подумал, дал абсолютно точный и абсолютно бесполезный для нас ответ.»*

Предупреждение. Поскольку система умолчаний в математике совершенно другая, чем у Вас, и система терминов тоже, причиной подобного «недоразумения» может быть то, что Вы случайно употребили слово, являющееся математическим термином. Замените его, и все станет на свои места (см. совет 17)!

Совет 7. *Если математик после всего вышеперечисленного говорит, что это абсолютно не исследовано, сразу же изобразите глубокий интерес и предложите ему написать совместную статью. Собственной рукой немедленно впишите в ее черновик фразу: «Все математические результаты данной работы принадлежат Математику».*

Обоснование. Математик на самом деле существо, исключительно сильно зависящее от общественного мнения, но не от того, от которого зависят обычные люди. Сформулируем некоторые принципы математического сообщества, которое оно предпочитает не формулировать явно и не афишировать.

Задачи ставят авторитеты, а решают их и рядовые математики тоже. Рядовой математик может и сам сформулировать задачу, но она будет воспринята сообществом лишь в том случае, если она является переформулировкой известной задачи. Выше всего ценится решение задачи, поставленной крупным авторитетом (и еще лучше, если длительное время она оставалась нерешенной). Постановки задач, не удовлетворяющие данному критерию, чаще всего с порога отвергаются сообществом. Постановки задач, взятые из практики, имеют большой шанс попасть в число отвергнутых, но, если подтверждено, что они действительно взяты из практики, авторитет может согласиться с тем, что постановка разумна, и тогда с этим согласится и сообщество.

Вы берете на себя ответственность за формулировку задачи и тем самым развязываете руки математику для ее решения.

Предупреждение. Если Вы испугаетесь того, что эта область плохо исследована, Вы вполне можете упустить отличное решение.

Совет 8. *В первую очередь Вас должны интересовать предположения и выводы математика. Мягко останавливайте его, когда он начинает вдаваться в детали математических обоснований и доказательств, возвращая его к использованным предположениям и к истолкованию результатов.*

Обоснование. На самом деле доказательства являются частью исключительно хорошо разработанного и продуманного ритуала, позволяющего математическому сообществу отсекать фантазии от фантастических, но обоснованных, выводов. Математические тонкости могут оставаться непонятными, дезориентировать и раздражать Вас, а ритуалом Вы все равно не овладеете.

Предупреждение. Из доказательства Вы иногда можете извлечь нечто такое, что казалось Вам совершенно невозможным (например, что бесконечное может быть частью конечного), и свежие идеи могут помочь Вам в дальнейшем. Но такая помощь может быть лишь косвенной.

* * *

Все изложенное выше в данном параграфе можно резюмировать следующим образом:

> *Прикладник должен поставить вопрос так, чтобы был возможен только релевантный ответ. «Релевантный» отнюдь не всегда означает «приятный» либо «ожидаемый».*

3 Как математику понимать прикладника?

Эта проблема несколько более разработана, чем предыдущая. Стоит сослаться хотя бы на работы [1, 3, 4]. Но в реальном общении положение немногим лучше.

Совет 9. *Если прикладник утверждает нечто как абсолютно общепринятое, обратите внимание на этот пункт и требуйте достаточных содержательных обоснований. Нигде так долго и безнаказанно не живут ошибки, как в том, что считается трюизмом.*

Обоснование. На личном опыте и личной математической практикой (теоремой) автор опроверг одно из предубеждений, а именно: построить доказательство уже готовой программы (которая писалась «от фонаря», но оказалась успешной) легче, чем заново построить эту программу доказательно. В. П. Оревков доказал, что окольные пути могут быть в башню экспонент раз короче прямых (см., например, Приложение А к книге [5]). Подобным примерам нет числа, но в современной практике изложения научных теорий и преподавания они упрямо замалчиваются.

Предупреждение. Разумные традиции в приложениях подводят достаточно редко, так что не отвергайте необдуманно того, что общепринято.

Совет 10. *Если теория подсказывает Вам, что в данном случае есть прямо применимое красивое решение, то чаще всего это — ловушка Дьявола, который надеется на Вашу самонадеянность и на очарование практика от такого красивого решения.*

Обоснование. Скорее всего, Вы не учли некоторых «мелочей», которые скажутся во время практической реализации решения (смотрите совет 2).

Здесь автор имел весьма неприятный личный опыт.

Известно, что проблема построения правильной программы является весьма и весьма трудной. Практически все программы, которыми мы пользуемся, неправильны. Пытались доказывать правильность программы, но в доказанных программах затем также обнаруживались ошибки (смотри совет практику 5, и в особенности первый пункт в Предупреждении к нему).

Еще Л. Брауэр в 1908 г. установил, что в математике, основанной на классической логике, даже в принципе невозможно избавиться от «чистых» теорем существования[4].

Брауэр же предложил логику, основанную не на понятии истинности, а на понятии реализуемости, и показал, что на ее основе можно развивать математику. Эта логика (интуиционистская) положила начало целому классу конструктивных логик, в которых из доказательства извлекается построение.

Автор предложил рассматривать программу как образ интуиционистского (в общем случае — конструктивного) доказательства теоремы вида

$$\forall x \, (A(x) \Rightarrow \exists y \, B(x, y))$$

и показал, что в случае, если на внутреннюю структуру аксиом теории накладываются некоторые ограничения(в принципе не снижающие логическую

[4]Мы придерживаемся следующей классификации теорем существования.

Сильно конструктивная или *реальная* теорема существования — такая, которая дает реализуемое построение объекта.

Конструктивная теорема существования — такая, из которой извлекается теоретический алгоритм построения объекта.

Чистая (или эффективная по Пуанкаре [3]) теорема существования – та, из которой извлекается однозначное описание построенного объекта, но алгоритма она не дает.

Грязная теорема существования — такая теорема, которая даже в принципе не может дать построения объекта.

То, что в математической традиции называют чистыми теоремами существования, у нас называют грязными.

силу теории в смысле чисто математической выразительности), то из доказательства можно извлечь программу преобразования значения x и реализации (возможно, являющейся сложным объектом высшего типа) формулы $A(x)$ в значение y и реализацию $B(x, y)$.

При этом выяснилось, что часть доказательства в программу не переходит, порождая *призраки* (термин Г. С. Цейтина) — объекты и утверждения, которые необходимы для понимания программы, хотя и не присутствуют в ее тексте.

Далее, выяснилось, что этот процесс дает решение лишь в принципе. Мало того, что задача поиска вывода в конструктивной логике может оказаться труднее, чем в классической, но самое главное то, что именно знания, окружающие прямо постулируемые и достаточно легко выписываемые свойства библиотеки программ, являются решающим моментом. А задача их выявления и аксиоматизации исключительно трудна, да вдобавок ее успешное решение в результате еще повышает сложность задачи поиска вывода в конструктивной теории. Так что предложенное автором решение является идеальным, а не реальным.

Характерно, что и до сих пор эта серия его работ считается основополагающей, хотя сам автор давно уже понял, что прямого приложения они иметь не могут.

Предупреждение. Идеальные решения часто могут помочь практику, так что смело ищите красивое, хоть и весьма идеальное, решение. Например, уже приведенное решение наглядно высветило необходимость знаний для построения хорошей программы, помогло обосновать концептуально весьма важную теорему о том, что задача доказательства правильности программы в принципе неправильно поставлена (доказать правильность оказалось труднее, чем построить программу заново, уже доказательно). В конечном счете оно открыло дорогу к системе стилей программирования [2], основанной на том, что разные классы программ предполагают разные, противоречащие друг другу, конструктивные логики.

Другое дело, что в этом случае и Вам, и практику, придется искать окольных путей для приложения результатов (необходимо помнить о том, что во всех действительно сложных ситуациях окольные пути оказываются короче!)

Совет 11. *Обязательно проверяйте полученное Вами решение на устойчивость! Самое красивое теоретическое решение ни гроша не стоит, если оно неустойчиво.*

Обоснование. Рассмотрим, скажем, такое общеизвестное математическое понятие, как производная. Если ее вычислять в реальной обстановке для функции, имеющей неточность (измерений либо вычисления либо шум, все равно), то мы можем уточнять ее вычисления лишь до некоторого предела. Рассмотрим, скажем, простейший численный метод: вычисляем ее приближенное значение по формуле

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2 \cdot \varepsilon}$$

Когда ε приближается к неточности вычислений, этот метод начинает расходиться при уменьшении ε. Такую сильную некорректность не преодолеть никакими чисто техническими ухищрениями, связанными с модификацией метода.

Явление, абсолютно подобное сильной некорректности вычислительной задачи, является обычным при рассмотрении последовательности теоретических приближений к реальному понятию. До некоторого момента эти приближения становятся (хотя бы в принципе) все лучше, а затем начинают резко ухудшаться.

Пока современные вычислительные мощности не избаловали соблазном применения грубой силы, математики порою явно и осознанно использовали подобный прием, приближая сложную функцию просто вычислимым рядом. который, вообще говоря, расходится, но до некоторого члена быстро сходится.

Стоит заметить, что, пожалуй, самое неустойчивое понятие в современной математике — то, на котором она вся основывается, а именно, логический вывод. Малейшие неточности в посылках при достаточно далеком развитии рассуждений приводят к исключительно далеко отстоящим от намеченной цели выводам. Наглядно иллюстрирует неустойчивость логического рассуждения и тот факт, что из любого противоречия следует уже все, что угодно.

Попытки подлатать ситуацию при помощи ‘расплывчатых’ или немонотонных выводов, еще ухудшают ее. Неустойчивость не преодолевается, а маскируется.

Именно из-за такой неустойчивости строгого логического вывода приложения математики порою напоминают пилотаж на истребителе с обратной стреловидностью крыла: он неустойчив, но управляющий им человек ухитряется превратить эту неустойчивость в преимущество высочайшей маневренности.

В первую очередь из-за такой неустойчивости при математической формализации нельзя жалеть сил на отработку исходных понятий. Только внутренне цельная и красивая формализация может выдержать жесточайшее испытание логическим выводом.

Предупреждение. То, что устойчиво в линейной модели, вполне может оказаться неустойчивым в модели второго порядка (см. [1]). Этот эффект имеет место отнюдь не только для численных моделей.

Далее, в хорошо продуманных математических теориях возникает давно известный, но до сих пор необъясненный феномен: после того, как в ходе рассуждений мы, казалось бы, бесконечно далеко удалились от всякой реальности и здравого смысла, неожиданно мы вновь возвращаемся к реальным (или хорошо применимым идеальным) конструкциям принципиально нового уровня. В качестве примера достаточно сослаться, скажем, на фракталы либо на нестандартный анализ.

Совет 12. *Не стремитесь обобщать решение до предела. Решайте задачу в тех границах, которые нужны практику, а обобщение приберегите для чисто теоретической работы.*

Обоснование. В практических границах Вы с большей вероятностью выдадите красивое и применимое решение. Вдобавок практик будет раздражаться детальным копанием в «явно не нужных» случаях.

Предупреждение. Если обобщение производится без потерь (что возможно гораздо чаще, чем думают специалисты с низким теоретическим уровнем), его нужно делать.

Далее, для себя эскизный набросок обобщений все-таки стоит иметь, поскольку они являются мощным средством проверки устойчивости решения.

Совет 13. *Если Вы получили красивое и полезное решение, помните, что законы математики являются общими и абстрактными и это решение не может быть частным. Поместите его в свой арсенал и стремитесь найти другие прикладные разделы с аналогичными математическими описаниями.*

Обоснование. Очевидно для любого математика.

Предупреждение. Найти такие разделы может оказаться нелегко, и здесь играет первоочередную роль Ваш общий кругозор и широкая любознательность (если она есть).

Совет 14. *В начале совместной работы постарайтесь расположить коллегу-прикладника к тому, чтобы он как можно больше и как можно дольше рассказывал о ней (лучше всего это сделать, проявляя искреннюю заинтересованность в его работе и давая мелкие советы). Не раздражайтесь, даже если Вам кажется, что сказанное не имеет никакого математического смысла, и не торопитесь говорить «Этим можно пренебречь».*

Обоснование. В процессе такого общения Вы получаете и ту информацию, которую коллега при прямом «допросе» считал бы либо неважной, либо общеизвестной. А для Вас она оказаться весьма ценной и даже решающей для успеха работы.

Предупреждение. Не увлекитесь конкретикой.

Совет 15. *Действительно полезное математическое решение никогда не бывает фотографией действительности, оно скорее напоминает карикатуру на нее. Найдите, от чего можно абстрагироваться, и абстрагируйтесь.*

Обоснование. Логический вывод неустойчив. В реальности, когда предположения, положенные в основу использованных либо доказанных Вами теорем, не могут выполняться точно и безоговорочно, слишком далекое проведение такого вывода приведет к дезориентации. Поэтому надо брать не общую модель, а ту, которая наиболее четко подчеркивает специфику рассматриваемой практической задачи. А уж из таких моделей нужно выбрать, действительно, самую общую (и, следовательно, чаще всего опять-таки наиболее простую). В частности, если Ваша модель уже стала хорошей, остерегайтесь пополнять ее новыми эффектами. Самое лучшее приближение отнюдь не всегда самое сложное. Добавление хорошего чаще всего разрушит то, что у Вас уже было. Лучше рассматривайте это как материал для другой модели, которой Вы, возможно, займетесь в будущем.

Предупреждение. При жестком проведении такого подхода подчеркивайте, что математические методы могут эффективно сработать лишь в том случае, если Вам совместно с практиком удастся выделить самое главное и сосредоточиться на нем. Старайтесь избегать общепринятых в математическом сообществе слов типа «Для простоты примем, что…» или «Без ограничения общности можно считать, что…»

* * *

Все изложенное выше в данном параграфе можно резюмировать следующим образом:

> *Математик должен уточнять до бесконечности постановку задач, стараясь все же не вызвать раздражение у прикладника.*

4 Общие советы

Есть и те советы, которые одинаково подходят обеим сторонам диалога. Приведем некоторые из них.

Совет 16. *Все время помните, что Вы с партнером живете в разных мирах и говорите на разных языках. Не обманывайтесь одинаковыми словами: контекст все равно у них другой.*

Обоснование. Все, что было сказано выше.

Предупреждение. Все равно здесь всего не скажешь.

Совет 17. *Старайтесь избегать терминов.*

Обоснование. Термины — то место, где даже диалекты одного и того же языка (скажем, математического) отличаются сильнее всего. Далее, термины привычны для Вас, но их выбор может быть на самом деле предельно дурацким (некритически зафиксированная традиция Вашего сообщества).

Автор видел, как во время разговора с заказчиком специалист по теории вероятностей сказал ритуальную фразу[5]:

Распределение ошибок нормальное.

Заказчик отреагировал:

Конечно! Оно у нас ненормальное, что ли?

Математик даже не услышал этой фразы, которая показала бы ему, насколько извращенно его поняли.

Автор видел также, как программист и математик оба употребляли термин «конкретизация», понимая на самом деле его с точностью до наоборот: программист (который в данном случае первым употребил этот термин и так и не уразумел, почему же его как-то не так понимают) имел в виду подстановку в объект более конкретных алгоритмов и добавление новых полей либо методов, а математик имел в виду избавление от лишней общности и переход к более узкой и более специальной структуре, скорее всего, с выбрасыванием лишних методов.

Предупреждение. Если Вы не можете избавиться от терминов, скорее всего Вы неглубоко понимаете вопрос. Один из критериев глубокого понимания сути дела — умение выразить ее совершенно разными словами. Так что тот, кто изо всех сил цепляется за конкретные слова, демонстрирует свой низкий уровень.

Совет 18. *Будьте максимально терпимы к тому, что Вам кажется ошибкой партнера, и даже к тому, что действительно является его ошибкой. Постарайтесь благожелательно выяснить, чего же он хотел на самом деле, заставив его переформулировать свою цель несколькими различными способами.*

Обоснование. Все вышеизложенное.

Предупреждение. Благожелательность кончается там, где начинается явная халтура.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд. *«Жесткие» и «мягкие» математические модели*. М.: Администрация Президента России, 1997, 23 с.

[2] Н. Н. Непейвода, И. Н. Скопин. Основания программирования. Москва-Ижевск, РХД, 2003, 880 с.

[5] На самом деле это типичный случай, когда использованием терминов неявно протаскиваются оговорки типа «Примем для простоты» или «Общепринято»

[3] А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1983, 560 с.

[4] У. У. Сойер. *Прелюдия к математике*. М.: Просвещение, 1972, 192 с.

[5] Ч. Чень, Р. Ли. *Математическая логика и автоматическое доказательство теорем*. М.: Наука, 1983.— 360 с.